2013학년도 대학 신입학생 수시모집 일반전형

수 학	2012년 11월 23일(금)		총 2쪽

※ 시작 전 반드시 쪽 번호를 확인하시기 바랍니다.

[문제 1]

좌표평면에서 영역 S가 주어져 있다고 하자. (단, $0 <$ S의 넓이$< \infty$.)
S에 포함된 임의의 영역 R에 대하여 다음을 가정한다. 영역 S에서 한 점을 무작위로 택할 때, 그 점이 영역 R에 있을 확률은 $\dfrac{R\text{의 넓이}}{S\text{의 넓이}}$이다.

이제 좌표평면에서 부등식 $-1 \le x \le 1$, $-1 \le y \le 1$로 주어진 영역에서 한 점 (a, b)를 무작위로 택하여 다음 연립방정식을 만들었다.

$$\begin{cases} 3u - v = a \\ u + v = b \end{cases}$$

이 연립방정식의 해 (u, v)가 $u \ge 0$을 만족시키는 사건을 A, $v \ge 0$을 만족시키는 사건을 B, $v \ge u$를 만족시키는 사건을 C라고 할 때, 다음 질문에 답하여라.

1-1. 사건 A와 사건 B가 동시에 일어날 확률 $P(A \cap B)$를 구하여라.

1-2. 두 사건 A와 C는 서로 독립임을 보여라.

1-3. a, b가 모두 양수인 사건을 D라 할 때, 조건부확률 $P(D \mid A \cap B)$를 구하여라.

[문제 2]

좌표공간에서 xy 평면에 놓여 있는 원

$$\{(x,y,z)\mid x,\ y,\ z\text{는 실수},\ x^2+y^2=1,\ z=0\}$$

을 따라 일정한 방향으로 한 바퀴 도는 점 $P(\cos t,\sin t,0)$ 을 생각하자. 그리고 양의 상수 a, L 과 연속함수 $u(t)$, $v(t)$ 가 다음의 세 조건을 만족시킨다고 하자.

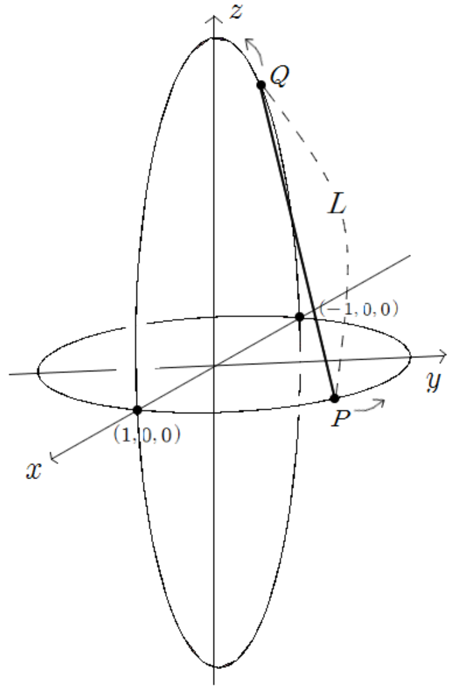
(가) 매개변수 t 가 0 에서 2π 까지 증가하는 동안 점 $Q(u(t),0,v(t))$ 가 좌표공간에서 xz 평면에 놓여 있는 타원

$$\left\{(x,y,z)\ \middle|\ x,\ y,\ z\text{는 실수},\ x^2+\frac{z^2}{a^2}=1,\ y=0\right\}$$

을 따라 일정한 방향으로 한 바퀴 돈다.

(나) 구간 $[0,2\pi]$ 에 속한 모든 t 에 대하여 두 점 $P(\cos t,\sin t,0)$, $Q(u(t),0,v(t))$ 사이의 거리가 L 로 일정하다.

(다) 구간 $[0,2\pi]$ 에서 방정식 $u(t)=0$ 의 해가 정확히 두 개 존재한다.



이 때, 다음 질문에 답하여라.

2-1. 구간 $[0,2\pi]$ 에 속한 모든 t 에 대하여

$$u(t)\{(1-a^2)u(t)-2\cos t\}=L^2-(1+a^2)$$

이 성립함을 보이고, 이로부터 $L^2=1+a^2$ 임을 설명하여라.

2-2. 구간 $[0,2\pi]$ 에 속한 모든 t 에 대하여 $(1-a^2)u(t)=2\cos t$ 가 성립함을 설명하여라.

2-3. 상수 a, L 과 함수 $u(t)$, $v(t)$ 를 모두 구하고 그 과정을 설명하여라.